



UMA NOTA SOBRE CÁLCULO E PROJEÇÃO DE BETA

ALEXANDRE RODRIGUES DE OLIVEIRA FILHO¹

EDUARDO ABAD FREITAS²

26/8/2005

Introdução

Quando Harry Markowitz desenvolveu a sua teoria de seleção de carteiras³ na década de 1950, certamente não imaginava, ainda, o impacto que teria na vida dos profissionais da área financeira. Ele formulou a base dos métodos de apoio à decisão de alocação de investimentos que até hoje serve de referência, apesar de apresentar algumas limitações.

Primeiramente, Markowitz definiu uma forma para mensurar risco, ao utilizar a variância sobre a rentabilidade de um investimento como medida de incerteza. Mais tarde, ele expôs como seria possível criar carteiras com risco mínimo ou com a melhor relação retorno-risco. Dessa forma, o risco de investimentos foi quantificado e paralelamente apresentado como um método para a construção de carteiras com grande margem de lucro que, assim, poderia oferecer a melhor rentabilidade para um determinado nível de risco.

Entretanto, apesar de sua relevância, a aplicação da teoria criada por Markowitz ficou restrita ao meio acadêmico durante vários anos por diversas

¹ Sócio-Diretor da Cyrnel International.

² Consultor Senior da Cyrnel International.

³ Markowitz, Harry M. (1952). "Portfolio selection," *Journal of Finance*, 7 (1), 77-91.

razões, especialmente por prever um alto custo computacional requerido por suas análises. Nessa época, a disponibilidade de computadores era mínima e, quando disponíveis, a execução de um simples programa estatístico podia significar facilmente a despesa de centenas ou milhares de dólares. Em seu artigo original, Markowitz mostrava que o risco de uma carteira depende das co-variâncias entre os ativos que a compõe. Ele também indicou como exemplo uma forma básica de cálculo, baseada nas séries históricas de rentabilidade, mas alertou - no fim de seu artigo - que deveriam existir formas mais adequadas de projetar as co-variâncias futuras entre a rentabilidade das ações.

Algumas dessas idéias foram passadas a William Sharpe, que mais tarde criou o *Single-Index Model*⁴ e o *Capital Asset Pricing Model*⁵.

Apenas na década de 1970⁶, com o desenvolvimento de modelos de fatores, os métodos de Markowitz começaram a ser usados pelos profissionais da área financeira.

Single-Index Model

O modelo de único fator proposto por Sharpe assumia que a relação existente entre as diferentes ações é relacionada a uma influência comum: movimentos do mercado como um todo.

Uma evidência muito comum, por exemplo, é que quando o mercado sobe (medido por um índice como IBX ou IBOVESPA) as ações geralmente também sobem ou vice-versa. Isso sugere, portanto, que a rentabilidade de uma é influenciada pela rentabilidade como um todo, que é refletida na rentabilidade de um índice abrangente.

A motivação inicial para a construção desse modelo foi a de redução do tamanho da quantidade de dados e conseqüentemente do custo computacional. Para calcular o risco do S&P500 com o uso do método de Markowitz eram necessários $\frac{1}{2} n (n + 1)$ cálculos de co-variâncias, onde n é o número de ações analisadas. Já com o modelo proposto por Sharpe o cálculo reduzia-se a $(n + 1)$ cálculos de co-variâncias.

Uma outra vantagem é a redução do erro de estimação total do risco, já que um número menor de parâmetros é usado.

⁴ Sharpe, William F., "A Simplified Model for Portfolio Analysis," *Management Science* 9, No.1, January 1963, 277-293.

⁵ Sharpe, William F., "Capital Asset Prices - A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, September 1964, 425-442.

⁶ Antes disso, Benjamin King no artigo "Market and Industry Factors in Stock Price Behavior," *Journal of Business* 39, No. 1, January 1966, 139-190 foi um dos primeiros a estudar formalmente as correlações entre grupos de ações.

O modelo de fatores tem alguns usos, entre eles:

- Avaliação de risco e beta;
- Geração de matrizes de co-variâncias para análise de risco e otimização;
- Decomposição de risco entre risco de mercado e risco residual (também chamado de individual, específico ou idiossincrático).

A principal deficiência do *Single-Index Model* está no fato de ele não capturar todos os movimentos comuns entre as ações. Na prática, diversos testes evidenciam que apenas o fator mercado não explica corretamente a correlação entre as ações.

O *Single-Index Model* serviu de base para a construção, mais tarde, do CAPM e de uma série de modelos de múltiplos fatores.

Beta

Beta pode ser definido, de forma geral, como uma medida de sensibilidade de um ativo ou carteira em relação a uma outra carteira de referência. O conceito de beta aplicado às finanças popularizou-se com o modelo CAPM. Tipicamente, a carteira de referência é um índice amplo de mercado como o IBOVESPA⁷ ou S&P500.

Ele é calculado por meio da seguinte equação:

$$\beta = \frac{Cov(r_p, r_m)}{Var(r_m)}$$

Onde:

$Cov(r_p, r_m)$ é a co-variância entre a rentabilidade em excesso do ativo e do *benchmark* (carteira de referência);

$Var(r_m)$ é a variância da rentabilidade do *benchmark*.

Com o CAPM também se popularizou a forma de cálculo de BETA ao usar uma regressão linear (tipicamente com 60 observações mensais) de mínimos quadrados ordinários. No CAPM proposto por Sharpe, a variância de uma carteira depende unicamente do beta da carteira e da variância da carteira de mercado.

⁷ O IBOVESPA não pode ser chamado exatamente de um "índice amplo", já que é muito concentrado em poucas empresas. O IBR-X é uma melhor alternativa para esse fim.

Entretanto, existe uma formulação genérica de beta que não está associada a uma regressão ou série histórica de índice, mas a uma matriz de co-variâncias de rentabilidade de ações. Podemos estimar o beta de uma carteira contra outra como, por exemplo, uma carteira de ações contra a carteira teórica do IBOVESPA. Nesse caso não é necessária explicitamente uma análise de regressão para estimar o beta, mas, sim, um método que forneça a matriz de co-variância entre as rentabilidades das ações do mercado.

A covariância entre a rentabilidade de uma carteira e a do IBOVESPA dependerá da composição das duas carteiras e da matriz de co-variâncias entre as rentabilidades dos ativos. Dessa forma é possível estimar o beta entre quaisquer carteiras, não necessariamente a partir do IBOVESPA.

Beta é uma medida relevante para a gestão de carteiras, pois reflete a exposição da carteira aos movimentos do *benchmark*. Um gestor de uma carteira de ações pode aumentar ou reduzir sua exposição ao IBOVESPA por meio de um controle eficiente de beta. O mesmo aplica-se aos fundos *market-neutral*⁸ que buscam manter o beta da carteira zerado ao longo do tempo.

Exposta a importância dessa medida para a gestão de investimentos, é razoável buscar a melhor maneira de cálculo a fim de melhor representar a exposição da carteira. Para esse fim, deve-se buscar a melhor maneira de se projetar uma matriz de covariâncias.

Modelos de múltiplos fatores⁹ são extensões ao trabalho original de Markowitz e ao *Single-Index Model*, e são referência em diversos mercados mundiais como a maneira mais adequada de se calcular matrizes de co-variâncias entre ações. Na Cyrnel, nos cinco anos mais recentes, especializamos-nos na adaptação e na implementação dessas metodologias para mercados emergentes, especialmente a América Latina.

Modelos de múltiplos fatores

A principal motivação nesse desenvolvimento de modelos de múltiplos fatores foi a de encontrar novas fontes ou *drivers* que possam explicar a co-variância (ou correlação) entre as ações.

Modelos de múltiplos fatores descrevem a rentabilidade dos ativos e sua matriz de co-variâncias como uma função de um número finito de atributos de risco. O número de estimadores em um modelo fatorial é de $\frac{1}{2}(k^2 + k + 1) + n$, onde k é o número de fatores do modelo e n é o número de ações.

⁸ Fundos que buscam sistematicamente rentabilidades sem correlação com algum índice de bolsa.

⁹ Veja exemplo de desenvolvimento de modelos de múltiplos fatores no Apêndice I deste documento.

É intuitivo supor que a rentabilidade de ações de empresas com características semelhantes é mais correlacionada do que a rentabilidade de ações de empresas com características diferentes.

Cada empresa possui um conjunto de características próprias como o posicionamento estratégico, linha de produtos, preços, canais de distribuição, endividamento, entre outras, que geram uma percepção de valor distinto. Mas de qualquer forma, independente dessas características, todas as empresas de telefonia, por exemplo, serão afetadas por uma mudança na legislação, ou por uma variação no preço dos equipamentos. Algo que – diretamente – não afetará as empresas de outras indústrias.

Os grupos não necessariamente precisam estar relacionados com segmentos industriais ou setoriais (cíclicas/não-cíclicas, duráveis etc.), mas podem estar relacionados com outras características que tenham ligação com rentabilidade e risco, tais como: grau de endividamento da empresa, tipo de emissão (ordinária versus preferencial), tamanho da empresa (empresa grande ou pequena). Qualquer informação pode ser um possível fator dos modelos, mas existem algumas características desejáveis para incluir-se um fator em um modelo de risco de múltiplos fatores:

1. Justificativa teórica ou prática para explicar rentabilidade de um grande grupo de ações; disponibilidade de referências bibliográficas ou resultados de estudos empíricos;
2. Disponibilidade de dados ao longo do tempo;
3. Poder explicativo relevante;
4. Baixa correlação com outros fatores.

Existem diversos tipos de modelos de múltiplos fatores, o que torna possível dividir entre os de séries temporais e os interseccionais (*cross-sectional*). Aqui falaremos desse último em sua implementação para o mercado brasileiro de ações.

O Cyrnel Equity Model¹⁰, modelo de risco para o mercado de ações desenvolvido para o mercado brasileiro, estende a definição de mercado usada no *Single-Index Model* para uma definição mais abrangente, o que faz surgir carteiras especiais chamadas de "carteiras fator" (do inglês "*factor portfolios*"), que representam diferentes segmentos do mercado:

¹⁰ Veja apêndice I para ter mais detalhes sobre o processo de construção e atualização desse tipo de modelo.

Indústrias

Fator	Exemplos
Telecom Cel	TELE SUDESTE ON TELEMIG PART ON TELESP CL PA ON
Telecom Fixa	EMBRATEL PAR PN BRASIL T PAR PN TELESP ON
Agric/Pecuária	FOSFERTIL PN ADUBOS TREVO PN BUNGE FERT PN
Alim/Fumo	AVIPAL ON SOUZA CRUZ ON SADIA S.A. PN
Auto/Mec	METAL LEVE PN MARCOPOLO PN MANGELS INDL PN
Finanças	BANESPA ON ITAUBANCO ON UNIBANCO ON
Comércio	LOJAS AMERIC ON GLOBEX PN P.ACUCAR-CBD PN
Construção	ETERNIT ON DURATEX PN CIM ITAU PN
Eletrônicos	TECTOY PNA GRADIENTE PNA
Energia	ELETROBRAS ON LIGHT ON CEMIG ON
Holding	IDEIAS NET RENNER PART PN *
Metal e Min.	VALE R DOCE ON CAEMI METAL PN MAGNESITA PNA
Metalurgia	FORJA TAURUS PN PARANAPANEMA PN LATASA ON
Outros	GLOBO CABO PN SARAIVA LIVR PNB VARIG TRANSP PN
Papel Celul	Klabin PN ARACRUZ PNB RIPASA PN
Petro/Química	BOMBRIL PN PETROBRAS BR PN POLITENO PNB
Siderurgia	COSIPA ON SID TUBARAO ON

	SID NACIONAL ON
Têxtil	ALPARGATAS PN GUARARAPES ON MARISOL PN
Transportes	EMBRAER ON TAM S/A PN ALL AMER LAT ON

Estilo

Fator de Estilo	Explicação	Indicadores
Tamanho	O tamanho de uma empresa é uma importante informação referente ao seu padrão de retorno e risco.	Log dos Ativos Totais da empresa Log do Valor de Mercado da Empresa Cubo do Log do Valor de Mercado da Empresa Log do patrimônio líquido da empresa
Value/Growth	Esse fator revela quão sobre ou subavaliada está uma empresa pelo mercado.	Inverso do P/VPA
Momentum	Identificar empresas ganhadoras x perdedoras. Existem diversas evidências de padrões de retorno baseados nessa informação.	Alpha histórico da ação Rentabilidade acumulada nos últimos 10 dias
Blue-Chip	Indicador de liquidez ou atratividade de empresas. <i>Blue-chip</i> são empresas mais visadas pelo mercado, seguida pelos analistas e investidores estrangeiros. São as ações mais negociadas em movimentos de entrada e saída de capital estrangeiro.	Variável binária. As ações pertencentes à composição do IBOVESPA são consideradas <i>blue-chip</i> .
Dólar	Exposição cambial da ação mede a sensibilidade das variações de preço (retorno) de uma ação às variações do dólar americano. Em momentos de alta do dólar, empresas com maior exposição são mais beneficiadas que empresas com menor exposição.	Sensibilidade da rentabilidade residual às variações do dólar PTAX. O procedimento é construído a partir de uma regressão em dois estágios. Primeiro é feita uma regressão dos retornos em excesso ao CDI da ação contra o retorno em excesso do IBOVESPA. O resíduo dessa regressão é

		regredido em relação à rentabilidade do DÓLAR.
Volatilidade	Indicador de risco das ações.	Omega: Volatilidade do retorno residual em relação ao IBOVESPA; Beta histórico elevado ao quadrado; Beta histórico; Beta histórico x Omega.

Conclusão

Apesar de aparentemente simples, o cálculo de BETA requer o uso de ferramentas estatísticas e computacionais adequadas. A Cynrel combina diferentes técnicas para obter projeções de betas adequadas para gestão de fundos de ações, *long-short*, neutros e também para avaliação de empresas.

Apêndice I - Atualização do Cyrnel Equity Model

De forma simplificada, apresentamos os seguintes procedimentos que são executados diariamente para estimar matrizes de co-variâncias de rentabilidade de ações que são servem de base à análise de risco paramétrico nos softwares fornecidos pela Cyrnel:

5. Captura de dados brutos
 - a. Cotações da BOVESPA;
 - b. Proventos (dividendos, subscrições, desdobramentos, agrupamentos etc.) das empresas;
 - c. Captura de **dados contábeis** da CVM (novas demonstrações contábeis);
6. Cálculos básicos
 - a. Cálculo de **rentabilidade total** dos ativos que considera os proventos;
 - b. Tratamento de *outliers* na rentabilidade;
 - c. Construção dos **descritores** para a quantidade de ações e para todos os fatores;
 - d. Tratamento de *outliers* nos descritores;
 - e. Agrupamento dos descritores para formar o **Indicador de Estilo**;
 - f. Tratamento de *outliers* nos indicadores de estilo;
 - g. Padronização dos indicadores de estilo para obter **Fatores de Estilo** com média 0.0 e desvio-padrão 1.0;
7. Construção e cálculo de rentabilidade das "carteiras fator"
 - a. Definição do universo de ativos que irá compor a carteira;
 - b. Aplicação de esquema de ponderação;
 - c. Construção de carteiras com mínima variância, sujeita à restrição de ter exposição igual a 1.0 ao fator analisado e zero a todos os outros;
 - d. Cálculo da rentabilidade diária total da carteira;
 - e. Cálculo da rentabilidade em excesso ao CDI (subtraindo-se o CDI de um dia);
8. Cálculo da **rentabilidade residual** para todas as ações
 - a. Calcula-se a rentabilidade explicada pelos fatores;
 - b. Subtrai-se a rentabilidade da ação da rentabilidade explicada pelos fatores;
9. Cálculo da **matriz de co-variâncias entre os retornos fatoriais**;
10. Cálculo da **matriz de co-variâncias entre os retornos residuais**;

Essa é uma visão geral do processo que omite algumas etapas intermediárias de controle de qualidade e de revisão de resultados.

Apêndice II – Alternativas de cálculo de beta

“Beta histórico” ou “naïve beta”

Nos EUA geralmente é calculado com uma janela de dados de 60 meses (cinco anos) de rentabilidade e T-BILL de três meses como taxa livre de risco. No Brasil não existe um padrão, mas muitos usam os últimos 252 dias úteis.

É a forma básica de calcular-se beta e tem como vantagem a simplicidade já que requer poucos dados e as contas são simples, mas – ainda assim - possui algumas desvantagens: (a) depende totalmente dos dados; (b) é sujeito a dados extremos; (c) a definição do índice muda com o tempo; (d) ajusta-se lentamente às mudanças ocorridas na empresa, entre outras.

O “beta histórico” é fornecido pela maioria dos *feeders* de dados, mas certamente é o que possui menor capacidade preditiva.

Beta com métodos robustos

É uma variação do beta histórico, só que se usam métodos robustos no cálculo do coeficiente angular da regressão. Em lugar de minimizar o erro médio quadrático (mínimos quadráticos) entre a reta e os pontos, são usadas medidas menos suscetíveis a erros como desvio-absoluto médio (mínimos absolutos).

“Beta bayesiano”

Blume (1975)¹¹ percebeu que existia uma tendência de reversão à média, isto é, quando o beta histórico ficava abaixo da média, ele tendia a aumentar e vice-versa.

Vasicek (1973)¹² aplica diretamente o método bayesiano, ao combinar o beta histórico com um valor definido anteriormente, tipicamente 1.

Tem todas as vantagens e deficiências do beta histórico. A vantagem adicional é que reconhece com mais facilidade o efeito de reversão à média que existe nos betas.

“Beta fundamentalista”

Proposto por Rosenberg¹³, a idéia por detrás dessa medida é que o beta pode ser explicado pelas características fundamentalistas da empresa e do comportamento de suas ações no mercado. Algumas variáveis comuns

¹¹ Blume, Marchall (1971). "On the Assessment of Risk", *Journal of Finance*, 6, No. 1, Março, 1-10.

¹² Vasicek, Oldrich (1973). "A note on using cross-sectional information in Bayesian estimation of security betas", *Journal of Finance*, 8, No. 5, Dezembro, 1233-1239.

¹³ Rosenberg, B., "Prediction of Common Stock Betas," *Journal of Portfolio Management*, Winter 1985, pp. 5-14.

incluem *Dividend Earnings*, Dívida/Ativo, Tamanho da Empresa etc. Uma das principais dificuldades dessa metodologia está na obtenção de dados e na seleção das variáveis explicativas. Outro problema é que ele assume que a relação entre o beta e as variáveis explicativas é a mesma para todas as empresas.

Modelo Multi-Fatorial

Uma forma mais geral de calcular-se beta envolve a definição de um modelo multi-fatorial. Tipicamente, existem os seguintes tipos de modelos multi-fatoriais para o mercado de ações:

- Modelos fundamentalistas como Fama-French¹⁴ ou de Rosenberg;
- Modelos estatísticos baseados em análise de componentes principais;
- Modelos macro-econômicos, os quais usam variáveis como taxa de juros, PIB, inflação etc.

Como apresentado antes, o beta de uma carteira em relação ao seu *benchmark* é dado por:

$$\beta = \frac{Cov(r_p, r_b)}{Var(r_b)} \quad \text{AII.1}$$

Ao usar a abordagem multi-fatorial a co-variância entre duas carteiras é decomposta em duas partes: uma parte (a) explicada pelos fatores, chamada de co-variância devida aos fatores comuns e outra (b) não explicada pelos fatores, chamada de co-variância específica.

A co-variância devida aos fatores comuns pode ser calculada por:

$$CFC(r_p, r_b) = \mathbf{x}'_p \mathbf{F} \mathbf{x}_b \quad \text{AII.2}$$

Onde:

\mathbf{x}_p é o vetor (k x 1) de exposição da carteira aos fatores de risco;

\mathbf{x}_b é a vetor (k x 1) de exposição do *benchmark* aos fatores de risco;

\mathbf{F} é a matriz (k x k) de co-variâncias entre os retornos dos fatores;

k é o número de fatores (atualmente igual a vinte e cinco)

A co-variância específica é dada por:

$$SC(r_p, r_b) = \mathbf{h}'_p \mathbf{\Omega} \mathbf{h}_b \quad \text{AII.3}$$

¹⁴ Fama, E., R., Kenneth, "French Journal of Finance The Cross-Section of Expected Stock Returns", 1992.

Onde:

\mathbf{h}_p é o vetor (n x 1) de pesos (ponderação) dos ativos da carteira;

\mathbf{h}_b é o vetor (n x 1) de pesos (ponderação) dos ativos do *benchmark*;

n é o número de ativos da carteira.

Ao combinarmos AII.2 e AII.3, tem-se que a co-variância segundo o modelo multi-fatorial é:

$$Cov(r_p, r_b) = CFC(r_p, r_b) + SC(r_p, r_b) = \mathbf{X}_p^t \mathbf{F} \mathbf{X}_b + \mathbf{h}_p^t \mathbf{\Omega} \mathbf{h}_b$$

Finalmente, a fórmula do beta projetado fornecido pela Cyrnel fica como:

$$\beta = \frac{\mathbf{X}_p^t \mathbf{F} \mathbf{X}_b + \mathbf{h}_p^t \mathbf{\Omega} \mathbf{h}_b}{Var(r_b)} = \frac{\mathbf{X}_p^t \mathbf{F} \mathbf{X}_b + \mathbf{h}_p^t \mathbf{\Omega} \mathbf{h}_b}{\mathbf{h}_b^t (\mathbf{X}_b^t \mathbf{F} \mathbf{X}_b + \mathbf{\Omega}) \mathbf{h}_b}$$

Cyrnel International

Brasil

Praça Floriano, 1007
10º andar
Centro
Rio de Janeiro, RJ
20031-050
Tel. + 55 21 2533 1728
contato@cyrnel.com.br
www.cyrnel.com.br

México

Bosque de Ciruelos, 180
Piso 8
Col. Bosques de las Lomas
Ciudad de Mexico, DF
11700
Tel. +52 5950 1516
contacto@cyrnel.com.mx
www.cyrnel.com.mx